Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 0
Abgabe: 25.10.2022, 14 Uhr
Dieses Blatt wird nicht benotet

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeige per Induktion über die natürliche Zahl n folgende Behauptung:

Gegeben eine injektive Abbildung $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$, so ist $m \leq n$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**
Betrachte das Polynom $P(T) = 8T^3 - 6T - 1$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$. Zeige mit elementaren Methoden, dass $P(T)$ keine rationalen Nullstellen besitzt.
Muss $P(T)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzen?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Dreieck sowie ein regelmäßiges Fünfeck, beide im Einheitskreis einbeschrieben.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

a) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Finde ein normiertes Polynom $Q(T)$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ derart, dass
$$T^n - 1 = (T - 1) \cdot Q(T).$$
Schließe daraus, dass die in Polarkoordinaten komplexe Zahl $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ Nullstelle eines normierten Polynoms zweiten Grades mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeige, dass die Teilmenge
$$\{a + b\zeta\}_{a,b \in \mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$$
abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist. Was ist ihre Dimension als $\mathbb{Q}$-Vektorraum? (Warum ist sie überhaupt ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum?)

c) Liegt das multiplikative Inverse der komplexen Zahl $a + b\zeta$ (mit a, b rationalen Zahlen, nicht beide Null) in der obigen Teilmenge? Und die reelle Zahl $\sqrt{2}$?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.